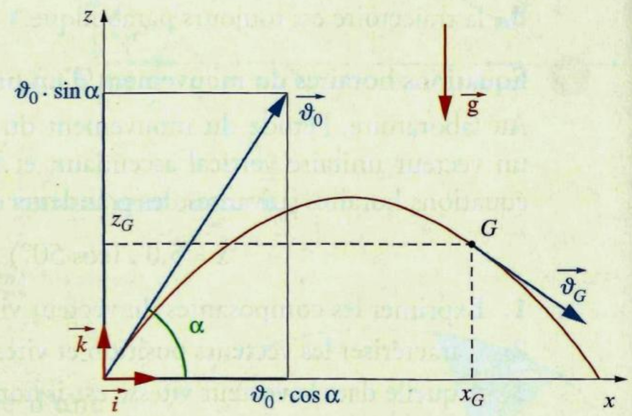
Fiche Méthode : Comment obtenir les équations horaires du centre d'inertie d'un projectile ?

Un projectile est lancé dans le champ de pesanteur uniforme avec la vitesse $\vec{\vartheta}_0$.
La deuxième loi de NEWTON permet de connaître les coordonnées de l'accélération $\vec{a}_G(\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z})$ de son centre d'inertie G. Comment obtenir, à partir de celles-ci, les coordonnées du vecteur vitesse $\vec{\vartheta}_G(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$, puis celles du vecteur position $\overrightarrow{OG}(x, y, z)$?

→ Déterminer les coordonnées du vecteur accélération.



La deuxième loi de NEWTON donne $\vec{a}_G = \vec{g}$.

La relation précédente permet d'écrire :

$$\ddot{x} \cdot \vec{i} + \ddot{y} \cdot \vec{j} + \ddot{z} \cdot \vec{k} = -\mathrm{g} \cdot \vec{k}.$$

Il vient : $\ddot{x} = 0;\quad \ddot{y} = 0;\quad \ddot{z} = -\mathrm{g}.$

Ces relations sont générales quel que soit le mode de lancement du projectile.

Les primitives successives vont dépendre des conditions initiales.

Noter les conditions initiales. À $t = 0$:

$\overrightarrow{OG} = \vec{0}$ et $x_0 = y_0 = z_0 = 0$;

$\vec{\vartheta}_G = \vec{\vartheta}_0$ et $\dot{x}_0 = \vartheta_0 \cdot \cos\alpha$; $\dot{y}_0 = 0$; $\dot{z}_0 = \vartheta_0 \cdot \sin\alpha$.

→ Déterminer les coordonnées du vecteur vitesse.

- $\ddot{x} = 0$ implique $\dot{x} = $ cte.

  La constante est déterminée, pour $t = 0$ lorsque le projectile est lancé de O :

  $$\dot{x} = \dot{x}_0 = \vartheta_0 \cdot \cos\alpha.$$

- $\ddot{y} = 0$ implique $\dot{y} = $ cte.

  La constante est déterminée pour $t = 0$:

  Donc : $\dot{y} = \dot{y}_0 = 0.$

- $\ddot{z} = -\mathrm{g}$ implique $\dot{z} = -\mathrm{g} \cdot t + $ cte.

  La constante est déterminée pour $t = 0$: $\dot{z}_0 = \vartheta_0 \cdot \sin\alpha$.

  Donc : $\dot{z} = -\mathrm{g} \cdot t + \vartheta_0 \cdot \sin\alpha.$

→ Déterminer les coordonnées du vecteur position.

- $\dot{x} = \vartheta_0 \cdot \cos\alpha$ implique $x = \vartheta_0 \cdot \cos\alpha \cdot t + $ cte.

  La constante est égale à $x_0 = 0$, valeur de x à $t = 0$;

  d'où : $x = \vartheta_0 \cdot \cos\alpha \cdot t.$

- $\dot{y} = 0$ implique $y = $ cte.

  La constante est égale à $y_0 = 0$, valeur de y à $t = 0$;

  d'où : $y = 0.$

- $\dot{z} = -\mathrm{g} \cdot t + \vartheta_0 \cdot \sin\alpha$ implique $z = -\frac{1}{2} \cdot \mathrm{g} \cdot t^2 + \vartheta_0 \cdot \sin\alpha \cdot t + $ cte.

  La constante est égale à $z_0 = 0$, valeur de z à $t = 0$;

  d'où : $$z = -\frac{1}{2} \cdot \mathrm{g} \cdot t^2 + \vartheta_0 \cdot \sin\alpha \cdot t.$$