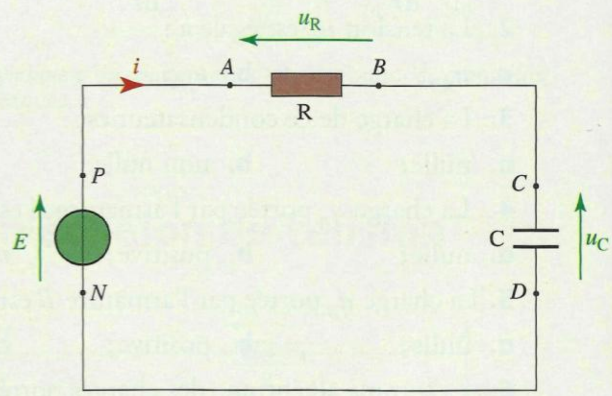
Fiche Méthode : Comment établir une équation différentielle et vérifier une solution à cette équation ?

Pour étudier l'évolution temporelle d'une grandeur électrique (tension, intensité, charge) dans un circuit électrique, il est nécessaire de savoir établir une équation différentielle dont la solution est la grandeur recherchée.

On se propose d'étudier les variations, en fonction du temps, de la tension u_C aux bornes du condensateur du circuit ci-dessous, au cours de la charge.

→ Utiliser la loi d'additivité des tensions.



$u_{PA} + u_{AB} + u_{BC} + u_{CD} + u_{DN} + u_{NP} = 0.$

- Repérer les tensions aux bornes de fils de connexions, car elles sont nulles.

$0 + u_{AB} + 0 + u_{CD} + 0 + u_{NP} = 0$

$u_{AB} + u_{CD} + u_{ND} = 0.$

Utiliser les notations des tensions du schéma ($u_{NP} = -u_{PN} = -E$).

$u_R + u_C - E = 0$

$u_R + u_C = E. \quad (1)$

→ Écrire l'équation établie, seulement en fonction de la grandeur étudiée : $u_c(t)$.

$u_R = R.i$ et $i = \dfrac{dq}{dt}$. Avec $q = C.u_C$, on a : $u_R = R.C.\dfrac{du_C}{dt}$.

On obtient, d'après (1) : $R.C.\dfrac{du_C}{dt} + u_C = E$.

Soit : $\dfrac{du_C}{dt} + \dfrac{1}{R.C}.u_C = \dfrac{E}{R.C}$.

On pose $\tau = R.C$, donc : $$\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{\tau}.u_C = \frac{E}{\tau} \qquad (2)$$

On a ainsi établi l'équation différentielle qui régit l'évolution au cours du temps de la tension $u_C(t)$, grandeur étudiée.

→ Vérifier la solution.

La solution de l'équation différentielle est toujours spécifiée dans l'énoncé de l'exercice. Par exemple, dans le cas présent, lors de la charge du condensateur, la solution de l'équation différentielle pour la tension aux bornes du condensateur est :

$$u_C = E.\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right).$$

Il s'agit de vérifier que cette fonction est bien solution de l'équation différentielle (2).

Dérivons l'expression du u_C : $\dfrac{du_C}{dt} = \dfrac{E}{\tau}.e^{-\frac{t}{\tau}}$;

$\dfrac{du_C}{dt} + \dfrac{1}{\tau}.u_C = \dfrac{E}{\tau}.e^{-\frac{t}{\tau}} + \dfrac{1}{\tau}.E.\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) = \dfrac{E}{\tau}$. Nous retrouvons l'équation (2).

La fonction $u_C = E.\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$. est bien solution de l'équation différentielle.